Alternativni opis Dekartove ravni

Definicija

Ako su $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ i $r\in\mathbb{R}$ tada

(i) $A+B=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\in\mathbb{R}^2$

(ii) $rA=(rx_1, ry_1)\in\mathbb{R}^2$

(iii) $A-B=A+(-1)B=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$

(iv) $\langle A,B\rangle = x_1x_2+y_1y_2\in\mathbb{R}$

(v) $\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}\in\mathbb{R}$

Propozicija

Za sve $A,B,C\in\mathbb{R}^2$ i $r,s\in\mathbb{R}$

(i) $A+B=B+A$

(ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(iii) $r(A+B)=rA+rB$

(iv) $(r+s)A=rA+sA$

(v) $\langle A,B\rangle=\langle B,A\rangle$

(vi) $\langle rA,B\rangle=r\langle A,B\rangle$

(vii) $\langle A+B,C\rangle=\langle A,C\rangle+\langle B,C\rangle$

(viii) $\|rA\|=|r|\,\|A\|$

(ix) $\|A\|>0$ ako $A\neq(0,0)$.

Dokazati prethodnu propoziciju.

R: (i) $A+B=B+A$

$A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$,

$$\left.\begin{array}{l} A+B=(x_1+x_2,\ y_1+y_2) \\ B+A=(x_2+x_1,\ y_2+y_1)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ A+B=B+A$.

(ii) $(A+B)+C=A+(B+C)$

$A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, $C=(x_3,y_3)$

$$\left.\begin{array}{l} (A+B)+C=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)+(x_3,y_3)=(x_1+x_2+x_3,\ y_1+y_2+y_3) \\ A+(B+C)=(x_1,y_1)+(x_2+x_3,\ y_2+y_3)=(x_1+x_2+x_3,\ y_1+y_2+y_3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ (A+B)+C=A+(B+C)$

(iii) $r(A+B)=rA+rB$

$$\left.\begin{array}{l} r(A+B)=r(x_1+x_2,\ y_1+y_2)=(rx_1+rx_2,\ ry_1+ry_2) \\ rA+rB=(rx_1,ry_1)+(rx_2,ry_2)=(rx_1+rx_2,\ ry_1+ry_2) \end{array}\right\} \Rightarrow r(A+B)= \\ =rA+rB$$

(iv) $(r+s)A=rA+sA$

$$\left.\begin{array}{l} (r+s)A=(r+s)(x_1,y_1)=((r+s)x_1,\ (r+s)y_1)=(rx_1+sx_1,\ ry_1+sy_1) \\ rA+sA=(rx_1,ry_1)+(sx_1,sy_1)=(rx_1+sx_1,\ ry_1+sy_1) \end{array}\right\} \Rightarrow (r+s)A= \\ =rA+sA$$

(v) $\langle A,B\rangle=\langle B,A\rangle$

$$\left.\begin{array}{l} \langle A,B\rangle=x_1x_2+y_1y_2 \\ \langle B,A\rangle=x_2x_1+y_2y_1=x_1x_2+y_1y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle A,B\rangle=\langle B,A\rangle$$

(vi) $(r+s)A = rA + sA$

$$\left.\begin{aligned} &(r+s)A = (r+s)(x_1,y_1) = ((r+s)x_1, (r+s)y_1) = (rx_1+sx_1, ry_1+sy_1) \\ &rA+sA = (rx_1, ry_1) + (sx_1, sy_1) = (rx_1+sx_1, ry_1+sy_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (r+s)A = rA+sA$$

(vii) $< A+B, C > = < A, C > + < B, C >$

$$\left.\begin{aligned} &< A+B, C > = < (x_1+x_2, y_1+y_2), (x_3,y_3) > = (x_1+x_2)x_3 + (y_1+y_2)y_3 \\ &< A, C > + < B, C > = \underline{x_1x_3} + y_1y_3 + \underline{x_2x_3} + y_2y_3 = (x_1+x_2)x_3 + (y_1+y_2)y_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$< A+B, C > = < A, C > + < B, C >$$

(viii)

$\| rA \| = |r| \, \| A \|$

$$\| rA \| = \| r(x_1,y_1) \| = \| (rx_1, ry_1) \| = \sqrt{<(rx_1,ry_1),(rx_1,ry_1)>} =$$
$$= \sqrt{(rx_1)^2 + (ry_1)^2} = \sqrt{r^2(x_1^2+y_1^2)} = |r| \sqrt{x_1^2+y_1^2} = |r| \sqrt{<(x_1,y_1),(x_1,y_1)>}$$
$$= |r| \, \| A \|$$

(ix) $\| A \| > 0$ ako $A \neq (0,0)$

$A = (x_1, y_1)$

$\| A \| = \sqrt{< A, A >} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} > 0$ ako $A \neq (0,0)$

Definicija

Definišimo pravu L_{AB} kroz dvije različite tačke A i B na sljedeći način

$$L_{AB} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = A + t(B-A), \quad t \in \mathbb{R} \}.$$

(#) Pronaći tačku $C \in \mathbb{R}^2$ koja ne pripada pravoj L_{AB}.

Rj: $L_{AB} = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X = A + t(B-A),\ t \in \mathbb{R} \} = \left| \begin{array}{l} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \end{array} \right| =$

$= \{ (x_1 + t(x_2 - x_1),\ y_1 + t(y_2 - y_1)) \mid t \in \mathbb{R} \}.$

1° $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2$

Tačka $C(x_2, y_1)$ $\overbrace{\text{ne pripada}}^{\text{za } x_2 \neq x_1 \text{ i } y_2 \neq y_1}$ skupu L_{AB}.

Ako $C \in L_{AB} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x_1 + t(x_2 - x_1) \overset{x_1 \neq x_2}{\Longrightarrow} t = 1 \\ y_1 = y_1 + t(y_2 - y_1) \overset{y_2 \neq y_1}{\Longrightarrow} t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{\#kontradikcija}$$

2° $x_1 = x_2,\ y_1 \neq y_2$

Neka je $a \neq x_1$ proizvoljan realan broj.

Tačka $C(a, y_1)$ ne pripada pravoj L_{AB}.

Ako bi bilo da $C \in L_{AB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = x_1 + t(x_2 - x_1) \Rightarrow t \neq 0 \\ y_1 = y_1 + t(y_2 - y_1) \Rightarrow t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{\#kontradikcija}$$

3° $y_1 = y_2,\ x_1 \neq x_2$

Neka je $b \neq y_1$ proizvoljan realan broj.

Tada tačka $C(x_1, b)$ ne pripada pravoj L_{AB}

Kako je $A \neq B$ to mora biti da je $x_1 \neq x_2$ ili $y_1 \neq y_2$, pa je zadatak riješen.

(#) Data je prava $x=a$. Pronađi dvije tačke A i B za koje tako da datu pravu možemo napisati u obliku $L_{AB}=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid X = A+t(B-A),\ t\in\mathbb{R}\}$.

Rj.:

$A=(x_1,y_1)$

$B=(x_2,y_2)$

$x=a:\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=a\}$

$= \{(a,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$

$$A+t(B-A) = (x_1,y_1)+t(x_2-x_1,\ y_2-y_1) =$$

$$= (x_1+t(x_2-x_1),\ y_1+t(y_2-y_1)) = \left| \begin{array}{c} \text{stavimo da je} \\ x_1=a \\ x_2=a \end{array} \right|$$

$$= (a,\ y_1+t(y_2-y_1)) = \left| \begin{array}{c} \text{stavimo da je} \\ y_2=1 \\ y_1=0 \end{array} \right| = (a,t)$$

Prema tome za tačke $A=(a,0)$ i $B=(a,1)$ pravu $x=a$ možemo napisati u obliku L_{AB}.

Data je prava $y=kx+n$, za neka $k\neq 0$ i $n\neq 0$. Pronađi dvije tačke A i B za koje datu pravu možemo napisati u obliku $L_{AB}=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid X=A+t(B-A),\ t\in\mathbb{R}\}$.

Rj.

$A=(x_1,y_1)$

$B=(x_2,y_2)$

$$A+t(B-A)=(x_1,y_1)+t(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$$
$$=(x_1+t(x_2-x_1),\ y_1+t(y_2-y_1)) \overset{(*)}{=}$$

$y=kx+n$ je skup svih tački oblika $\{(x,kx+n) \mid x\in\mathbb{R}\}$
$=\{(t,kt+n) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

$\overset{(*)}{=}$ | ako stavimo da je $x_1=0$, $x_2=1$ | $=(t,\ y_1+t(y_2-y_1))=$ | ako stavimo da je $y_1=n$, $y_2=k+n$ |

$=(t,\ kt+n)$.

Prema tome za $A=(0,n)$, $B=(1,k+n)$ pravu L_{AB} možemo napisati u obliku L_{AB}.

(#) Data je prava L_{AB} gdje su $A=(1,2)$, $B=(3,0)$. Pronaći vrijednosti k i n takve da se data prava L_{AB} može napisati u obliku $y=kx+n$.

Rj:

$$L_{AB}=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid X=A+t(B-A),\ t\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\{X\in\mathbb{R}^2 \mid X=(1,2)+t(2,-2),\ t\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{(1+2t,\ 2-2t) \mid t\in\mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} x&=1+2t \\ y&=2-2t \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x-1&=2t \\ y-2&=-2t \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{x-1}{2}&=t \\ \frac{y-2}{-2}&=t \end{aligned}$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2} \Rightarrow y-2=-x+1 \Rightarrow y=-x+3$$

$$(2-2t=-1-2t+3)$$

Prema tome L_{AB} za $A=(1,2)$, $B=(3,0)$ se može napisati u obliku $y=-x+3$.

(#) Definišimo pravu L_{AB} kroz dvije različite tačke A i B na sljedeći način

$$L_{AB} = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X = A + t(B-A), \quad t \in \mathbb{R} \}$$

Ako je $\mathcal{L}'$ familija svih podskupova skupa $\mathbb{R}^2$ koji su oblika L_{AB}, pokazati da je tada $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}'\}$ Dekartova ravan (a time i geometrija incidencije).

Rj: Prisjetimo se da je $\mathcal{L}_E$ skup pravih oblika

$$L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\} \quad i \quad L_{m,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}.$$

Želimo pokazati da je $\mathcal{L}_E \subseteq \mathcal{L}'$ i $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}_E$.

(a) Neka je $\ell \in \mathcal{L}_E$ proizvoljna Dekartova prava. Ako je ℓ vertikalna prava L_a za A izaberimo $(a,0)$ a za B izaberimo $(a,1)$. Jasno je da $A, B \in \ell$. S druge strane

$$\ell = \{(a,t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(a,0) + \underbrace{t(0,1)}_{t((a,1)-(a,0))} \mid t \in \mathbb{R}\} = L_{AB} \in \mathcal{L}'$$

Time $\ell \in \mathcal{L}'$.

Ako je ℓ ne-vertikalna linija $L_{m,b}$ za A izaberimo $(0,b)$ a za B izaberimo $(1, b+m)$. Jasno je da $A, B \in \ell$.

$$\ell = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\} = \{(t, mt+b) \mid t \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(0,b) + t(1,m) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = (0,b) + t((1, b+m) - (0,b)),$$
$$t \in \mathbb{R}\} = L_{AB} \in \mathcal{L}'$$

Time $\ell \in \mathcal{L}'$, pa možemo zaključiti da $\mathcal{L}_E \subseteq \mathcal{L}'$.

(b) Neka je $L_{AB}\in\mathcal{L}'$ proizvoljna prava za neke tačke $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, i $A\neq B$.

Ako je $x_1=x_2$ (s obzirom da je $A\neq B$) tada $y_2-y_1\neq 0$ i

$$
\begin{aligned}
L_{AB} &= \{(x_1,y_1)+t(0, y_2-y_1) \mid t\in\mathbb{R}\} = \\
&= \{(x_1,\, y_1+t(y_2-y_1)) \mid t\in\mathbb{R}\} \\
&= \{(x_1,y) \mid y\in\mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=x_1\} = L_{x_1}\in\mathcal{L}_E
\end{aligned}
$$

a time $L_{AB}\in\mathcal{L}_E$.

Ako je $x_1\neq x_2$ tada $x_2-x_1\neq 0$. Označimo sa m i b vrijednosti

$$
m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \qquad b=y_1-mx_1.
$$

Tada

$$
\begin{aligned}
L_{AB} &= \{(x_1,y_1)+t(x_2-x_1,\, y_2-y_1) \mid t\in\mathbb{R}\} \\
&= \{(x_1,\, mx_1+b)+t(x_2-x_1,\, m(x_2-x_1)) \mid t\in\mathbb{R}\} \\
&= \{(x_1+t(x_2-x_1),\, m(x_1+t(x_2-x_1))+b) \mid t\in\mathbb{R}\} \\
&= \{(x,\, mx+b) \mid x\in\mathbb{R}\} \\
&= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=mx+b\} = L_{m,b}\in\mathcal{L}_E
\end{aligned}
$$

Time $L_{AB}\in\mathcal{L}_E$ i $\mathcal{L}'\subseteq\mathcal{L}_E$.

Prema tome pokazali smo da je $\mathcal{L}_E=\mathcal{L}'$ pa je $\{\mathbb{R}^2,\mathcal{L}'\}$ Dekartova ravan.

(#) Neka je $\mathcal{L}'$ familija svih podskupova iz $\mathbb{R}^2$ oblika

$$L_{AB} = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X = A + t(B-A),\ t \in \mathbb{R} \}.$$

Pokazati da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}'\}$ geometrija incidencije bez korištenja modela Dekartove ravni $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$.

Rj. Prisjetimo se: Apstraktna geometrija $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ je geometrija incidencije akko

(i) Svake dvije različite tačke pripadaju jedinstvenoj pravoj.

(ii) Postoji skup od tri nekolinearne tačke.

Prema tome trebamo pokazati da

- $\forall A, B \in \mathbb{R}^2\ \exists p \in \mathcal{L}'$ t.d. $A \in p$ i $B \in p$
- svaka prava L_{AB} ima najmanje dvije tačke
- $\forall A, B \in \mathbb{R}^2\ \exists!\, L_{AB} \in \mathcal{L}'$ t.d. $A \in L_{AB}$ i $B \in L_{AB}$
- postoji skup od tri nekolinearne tačke

ZA SVAKE DVIJE TAČKE $A, B \in \mathbb{R}^2$ POSTOJI PRAVA $p \in \mathcal{L}'$ t.d. $A \in p$ i $B \in p$.

$A(x_1, y_1)$
$B(x_2, y_2)$

Primjetimo da $L_{AB} \in \mathcal{L}'$ te da za $t=0$ imamo $X = A$ a za $t=1$ imamo $X = B$ $\Rightarrow A, B \in L_{AB}$

SVAKA PRAVA L_{AB} IMA NAJMANJE DVIJE TAČKE

$$L_{AB} = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X = A + t(B-A),\ t \in \mathbb{R} \} \Rightarrow \begin{matrix} t=0: & X = A \\ t=1: & X = B \end{matrix} \Rightarrow A, B \in L_{AB}$$

SVAKE DVIJE RAZLIČITE TAČKE PRIPADAJU JEDINSTVENOJ PRAVOJ

Pretpostavimo da postoje dvije različite prave $L_{\bar{A}\bar{B}}$ i L_{AB} koje sadrže dvije date tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ gdje je $A \neq B$.

$$\left.\begin{matrix} L_{\bar{A}\bar{B}} = \{ \bar{X} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{X} = \bar{A} + t(\bar{B} - \bar{A}),\ t \in \mathbb{R} \} \\ L_{AB} = \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid X = A + t(B-A),\ t \in \mathbb{R} \} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t=0: & A = \bar{A} \\ t=1: & B = \bar{B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow L_{\bar{A}\bar{B}} = L_{AB}$$

*kontradikcija

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome postoji tačno jedna prava koja sadrži dvije date tačke.

POSTOJI SKUP OD TRI NEKOLINEARNE TAČKE

Neka su $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$ dvije različite tačke. Primjetimo da

$$L_{AB} = \{ \bar{X} \in \mathbb{R}^2 \mid X = A + t(B-A),\ t \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ \bar{X} \in \mathbb{R}^2 \mid X = (x_1,y_1) + (t(x_2-x_1), t(y_2-y_1)),\ t \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (x_1 + t(x_2-x_1), y_1 + t(y_2-y_1)) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Primjetimo da tačka $C(x_1,y_2)$ ne pripada pravoj L_{AB}. Ako bi bilo da $C \in L_{AB}$ tada $\exists t \in \mathbb{R}$ t.d. $C = A + t(B-A) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_1 + t(x_2 - x_1) \Rightarrow t = 0$$

$$y_2 = y_1 + t(y_2 - y_1) \Rightarrow t = 1$$

kontradikcija ($t=0$)

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ i $C(x_1,y_2)$ su tri nekolinearne tačke.

(u slučaju kada je $x_1 \neq x_2$ i $y_1 \neq y_2$)

(slično se pokaže i u slučaju kada je $x_1 = x_2$ ili $y_1 = y_2$)

(#) Pokazati da ako su $A, B \in \mathbb{R}^2$ tada

$$d_E(A,B) = \|A-B\|$$

Rj.:

$A = (x_1, y_1)$

$B = (x_2, y_2)$

$$d_E(A,B) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \quad \dots (1)$$

$$A - B = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$$

$$\|A-B\| = \sqrt{\langle A-B, A-B \rangle} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \quad \dots (2)$$

Na osnovu (1) i (2) jednakost slijedi.

Neka je L_{AB} data prava i neka je $f: L_{AB} \to \mathbb{R}$ f-ja definisana sa

$$f(A + t(B-A)) = t\,\|B-A\|$$

Pokazati da

(i) je f injekcija

(ii) f zadovoljava jednačinu mjere u sistemu $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$.

Rj.

(i) Izaberimo dvije proizvoljne tačke $P, Q \in L_{AB}$, $P \neq Q$. Tada $\exists s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ t.d.

$P = A + s_1(B-A)$ i $Q = A + s_2(B-A)$

$$f(P) = f(Q) \Rightarrow f(A+s_1(B-A)) = f(A+s_2(B-A)) \Rightarrow s_1\|B-A\| = s_2\|B-A\|$$

$$\Rightarrow (s_1 - s_2)\|B-A\| = 0 \overset{A\neq B}{\Rightarrow} s_1 - s_2 = 0 \Rightarrow s_1 = s_2 \Rightarrow P = Q$$

f je 1-1

(ii) Neka su P i Q iste tačke kao u (i)

$$\left.\begin{aligned} d_E(P,Q) &= \|P-Q\| = |s_1 - s_2|\,\|B-A\| \\ |f(P) - f(Q)| &= |s_1 - s_2|\,\|B-A\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow d_E(P,Q) = |f(P) - f(Q)|$$

f zadovoljava jednačinu mjere.

\# Ako je L_{AB} Dekartova prava, pokazati da je tada f-ja $f: L_{AB} \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$f(A+t(B-A)) = t\,\|B-A\|$$

mjera (koordinatni sistem) za $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$.

Rj.

F-ja f ima smisla jedino ako za svaku tačku $P \in L_{AB}$ postoji jedinstvena vrijednost t taka da $P = A + t(B-A)$.

Pokažimo da je ova tvrdnja tačna

Pretpostavimo da je $P = A + r(B-A)$ i $P = A + s(B-A)$. Tada

$$(0,0) = P - P = (A + r(B-A)) - (A + s(B-A)) =$$
$$= (r-s)(B-A)$$

pa je ili $r-s=0$ ili $B-A=(0,0)$. Kako je $A \neq B$ to je $B-A \neq (0,0)$ pa je $r-s=0$. To jest, $r=s$ i postoji jedinstvena vrijednost od t sa osobinom da $P = A + t(B-A)$. Prema tome f-ja f ima smisla.

Ostalo je još da pokažemo da je f bijekcija i da f zadovoljava jednačinu mjere.

FUNKCIJA f JE 1-1

$A(x_1, y_1)$
$B(x_2, y_2)$

$$f(A) = f(B) \Rightarrow f(A - 0(B-A)) = f(A - 1\cdot(B-A))$$

$$\Rightarrow 0 \cdot \|B-A\| = 1 \cdot \|B-A\| \Rightarrow \|B-A\| = 0 \Rightarrow B = A$$

f je injektivna

FUNKCIJA f JE NA

Za proizvoljno $u \in \mathbb{R}$ primjetimo da za $P = A + \dfrac{u}{\|B-A\|}(B-A)$

imamo da $P \in L_{AB}$ i

$$f(P) = \frac{u}{\|B-A\|} \cdot \|B-A\| = u \quad \Rightarrow \quad f \text{ je surjektivna}$$

FUNKCIJA f ZADOVOLJAVA JEDNAČINU MJERE

$$d_E(P,Q) = \|P-Q\| = \left| \begin{array}{l} \text{kako su } P,Q \in L_{AB} \\ \text{to } \exists u,v \in \mathbb{R} \\ \ P = A + u(B-A) \\ \ Q = A + v(B-A) \end{array} \right| = \|A + u(B-A) - (A + v(B-A))\|$$

$$= \|(u-v)(B-A)\| = |u-v| \, \|B-A\| \qquad \ldots (1)$$

$$|f(P) - f(Q)| = |u\|B-A\| - v\|B-A\|| = |u-v| \, \|B-A\| \qquad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \quad \Rightarrow \quad d_E(P,Q) = |f(P) - f(Q)|$$

vrijedi jednačina mjere.

<u>Propozicija</u> (Koši – Švarcova nejednakost)

Ako su $X, Y \in \mathbb{R}^2$ tada

$$|\langle X, Y\rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|. \qquad \ldots(1)$$

Štaviše, jednakost u nejednakosti (1) vrijedi ako i samo ako je ili $Y = (0,0)$ ili $X = tY$ za neko $t \in \mathbb{R}$.

(#) Dokaži Koši – Švarcovu nejednakost.

Rj. Ako je $Y = (0,0)$ tada imamo $|\langle X, Y\rangle| = 0 = \|X\| \cdot \|Y\|$ pa je nejednakost (1) tačna. Pretpostavimo sad da je $Y \neq (0,0)$. Posmatrajmo f-ju $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisanu sa $g(t) = \|X - tY\|^2$. Imamo da

$$g(t) = \langle X - tY, X - tY\rangle = \langle X, X\rangle - 2t\langle X, Y\rangle + t^2\langle Y, Y\rangle$$

Kako je $Y \neq (0,0)$ to je $\langle Y, Y\rangle \neq 0$ pa je $g(t)$ kvadratna f-ja. Iz definicije od $g(t)$ imamo da je $g(t) \geq 0$ za sve t pa g nemože imati dvije različite realne nule. Kako kvadratna f-ja $at^2 + 2bt + c$ ima različite realne nule akko $b^2 - ac > 0$, to mi moramo imati da

$$\langle X, Y\rangle^2 - \langle Y, Y\rangle\langle X, X\rangle \leq 0$$

ili

$$|\langle X, Y\rangle| \leq \sqrt{\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle} = \|X\| \, \|Y\|.$$

Ovo nam daje željenu nejednakost.

Primjetimo da ako je $Y \neq 0$ tada jednakost vrijedi jedino kada je $g(t) = 0$ ima dva ponavljajuća realna korijena. Ali $g(t) = 0$ akko $\|X - tY\| = 0$ tj. $X = tY$. Time jednakost vrijedi akko je ili $Y = (0,0)$ ili $X = tY$ za neko $t \in \mathbb{R}$.

Definicija (nejednakost trougla)

F-ja udaljenosti d na $\mathcal{S}$ zadovoljava nejednakost trougla ako

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C) \quad \text{za sve } A,B,C \in \mathcal{S}.$$

(#) Pokazati da Euklidova f-ja udaljenosti d_E zadovoljava nejednakost trougla.

Rj: Prvo iskoristimo Koši-Švarcovu nejednakost i pokažimo da

$$X, Y \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

$$\|X+Y\|^2 = \langle X+Y, X+Y \rangle = \langle X, X \rangle + 2\langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle$$
$$= \|X\|^2 + 2\langle X, Y \rangle + \|Y\|^2$$
$$\leq \|X\|^2 + 2|\langle X, Y \rangle| + \|Y\|^2$$
$$\leq \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\| + \|Y\|^2$$
$$= (\|X\| + \|Y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|X+Y\|^2 \leq (\|X\| + \|Y\|)^2 \Rightarrow \|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

Da bi završili sa dokazom, neka je $X = A - B$; $Y = B - C$. Tada

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \Leftrightarrow \|A-B+B-C\| \leq \|A-B\| + \|B-C\|$$

$$\Leftrightarrow \|A-C\| \leq \|A-B\| + \|B-C\|$$

$$\Leftrightarrow d_E(A,C) \leq d_E(A,B) + d_E(B,C).$$

i ovo vrijedi za $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^2$

Pokazati da Taksi udaljenost d_T zadovoljava nejednakost trougla.

Rj. Prisjetimo se: Taksi ravan $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_T\}$

$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad \forall P,Q \in \mathbb{R}^2$$

Izaberemi tri proizvoljne tačke $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ i $R(x_3,y_3)$.

$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$
$$d_T(Q,R) = |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$$
$$d_T(P,R) = |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|$$

i posmatrajmo nejednakost

$$d_T(P,R) \leq d_T(P,Q) + d_T(Q,R)$$

$$|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|$$

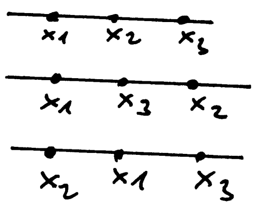
$$|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| \leq \left(|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|\right) + \left(|y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|\right)$$

Za realne brojeve x_1, x_2 i x_3 je moguć jedan od sljedećih slučajeva

1° $x_1 \leq x_2 \leq x_3$

2° $x_1 \leq x_3 \leq x_2$

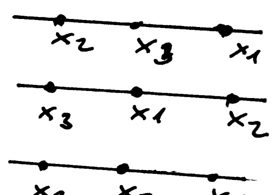
3° $x_2 \leq x_1 \leq x_3$



4° $x_2 \leq x_3 \leq x_1$

5° $x_3 \leq x_1 \leq x_2$

6° $x_3 \leq x_2 \leq x_1$



Za bilo koji od ovih slučajeva vrijedi $|x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$.

Slično bi pokazali da $\forall y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ $|y_1 - y_3| \leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|$.

Možemo zaključiti da

$$d_T(P,R) \leq d_T(P,Q) + d_T(Q,R) \quad \text{za } \forall P,Q,R \in \mathbb{R}^2$$

(#) Pokazati da max udaljenost d_s na $\mathbb{R}^2$ zadovoljava nejednakost trougla. (Prisjetimo se $d_s(P,Q) = \max\{|x_1-x_2|, |Y_1-Y_2|\}$).

Rj. Posmatramo metričku geometriju $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_s\}$ gdje je

$$d_s(P,Q) = \max\{|x_1-x_2|, |Y_1-Y_2|\}.$$

$\forall P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ $(P(x_1,Y_1), Q(x_2,Y_2), R(x_3,Y_3))$

$$d_s(P,Q) = \max\{|x_1-x_2|, |Y_1-Y_2|\}$$
$$d_s(Q,R) = \max\{|x_2-x_3|, |Y_2-Y_3|\}$$
$$d_s(P,R) = \max\{|x_1-x_3|, |Y_1-Y_3|\}$$

Želimo upr. pokazati da je $d_s(P,Q) \leq d_s(Q,R) + d_s(P,R)$

znamo da je $|x_1-x_2| \leq |x_2-x_3| + |x_1-x_3| \leq$

$$\leq \max\{|x_2-x_3|, |Y_2-Y_3|\} + $$
$$+ \max\{|x_1-x_3|, |Y_1-Y_3|\}$$

i dokaz je gotov ako je $|x_1-x_2| \geq |Y_1-Y_2|$.

Ako je $|x_1-x_2| < |Y_1-Y_2|$ tada

$$|Y_1-Y_2| \leq |Y_2-Y_3| + |Y_1-Y_3| \leq \max\{|x_2-x_3|, |Y_2-Y_3|\} + \max\{|x_1-x_3|, |Y_1-Y_3|\}$$

Tvrdnja slijedi.

(#) Za tačke $P, Q \in \mathbb{R}^2$ definišimo f-ju d_F na sljedeći način

$$d_F(P,Q) = \begin{cases} 0, & \text{ako } P=Q \\ d_E(P,Q), & \text{ako } L_{PQ} \text{ nije vertikalna} \\ 3d_E(P,Q), & \text{ako je } L_{PQ} \text{ vertikalna} \end{cases}$$

(a) Pokazati da je d_F f-ja udaljenosti na $\mathbb{R}^2$ i da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_F\}$ metrička geometrija.

(b) Dokazati da za ovu udaljenost, d_F, ne vrijedi nejednakost trougla.

Između dvije tačke

Definicija (između dvije tačke)

Za tačku B kažemo da je između tački A i C ako su A, B i C tri različite kolinearne tačke u metričkoj geometriji $\{\mathscr{P}, \mathscr{L}, d\}$ i ako

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,C).$$

(#) U taksi ravni pronađi tri tačke A, B, C koje nisu kolinearne ali za koje vrijedi

$$d_T(A,C) = d_T(A,B) + d_T(B,C).$$

Ovaj primjer nam pokazuje zašto u definiciji između dvije tačke trebamo kolinearnost tački.

Rj. Prisjetimo se: $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_T\}$

$$d_T(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad \forall P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Posmatrajmo tačke
$M(a,b)$
$N(0,0)$
$R(c,d)$

$d_T(M,R) = |a-c| + |b-d|$
$d_T(M,N) = |a| + |b|$
$d_T(N,R) = |c| + |d|$

Primjetimo da za $a=1, b=0, c=0, d=1$ imamo tačke
$M(1,0)$
$N(0,0)$
$R(0,1)$

Koje su nekolinearne i za koje vrijedi

$$\underbrace{d_T(M,R)}_{=2} = \underbrace{d(M,N)}_{=1} + \underbrace{d(N,R)}_{=1}$$

Odavde vidimo da jednakost $d_T(A,C) = d_T(A,B) + d_T(B,C)$ ne znači da su A, B i C kolinearne tačke.

S obzirom da ćemo pojam između dvije tačke koristiti često kroz sve probleme koji slijede, zbog jednostavnosti prihvatićemo sljedeću notaciju.

<u>Oznake</u> U metričnoj geometriji $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$

(i) $A-B-C$ znači da je tačka B između tački A i C;

(ii) AB označava udaljenost $d(A,B)$

(#) Neka su $A(4,4)$, $B(1,5)$ i $C(5,3)$ tri tačke iz Poincaré-ove ravni. Pokazati da je $B-A-C$

Rj. Primjetimo da je $p(A,B) = \overleftrightarrow{AB} = {}_cL_r$ gdje je

$$c = \frac{(16-25)+(16-1)}{2(4-1)} = \frac{6}{6} = 1$$

i

$$r = \sqrt{(4-1)^2+16} = 5$$

C također pripada pravoj ${}_1L_5$ s obzirom da

$$(5-1)^2 + 3^2 = 25$$

Time su A, B i C kolinearne tačke.

Sad definišimo $f : {}_1L_5 \longrightarrow \mathbb{R}$ sa

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x-1+5}{y}\right) = \ln\left(\frac{x+4}{y}\right)$$

f je standardna mjera za pravu ${}_1L_5$. Koordinate od A, B i C su $f(A) = \ln 2$, $f(B) = \ln 1 = 0$, $f(C) = \ln 3$

pa je
$$AB = |\ln 2 - 0| = \ln 2$$
$$BC = |0 - \ln 3| = \ln 3$$
$$AC = |\ln 2 - \ln 3| = \ln\frac{3}{2}$$

Time je $BC = BA + AC$ pa je $B-A-C$.

(#) Ako je $A(4,7)$, $B(1,1)$ i $C(2,3)$ pokazati da je tada $A-C-B$ u taksi ravni.

Rj.

Upute $A, B, C \in p(A,B) = \overleftrightarrow{AB}$ gdje je $p(A,B): y = 2x - 1$ ...(1)

$$\left.\begin{array}{l} d_T(A,C) + d_T(C,B) = 9 \\ d_T(A,B) = 9 \end{array}\right\} \quad \ldots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $A-C-B$

(#) Neka su $A(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(0,1)$ i $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ tri tačke Poincaré-ove ravni. Pokazati da je $A-B-C$.

Rj.

TAČKE A, B i C SU KOLINEARNE

Kako $-\frac{1}{2} \neq 0$ to $A, B \notin {}_aL$ (za neko a)

$${}_cL_r = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid (x-c)^2 + y^2 = r^2\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} A: & (-\frac{1}{2}-c)^2 + \frac{3}{4} = r^2 \\ B: & c^2 + 1 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4} + c + \cancel{c^2} + \frac{3}{4} = \cancel{c^2} + 1$$

$$c = 0 \Rightarrow r = 1$$

Prema tome $A, B \in {}_0L_1$. Nije teško provjeriti da također $C \in {}_0L_1$.

$${}_0L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{H} \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$\Rightarrow$ A, B i C su kolinearne tačke

ZA TAČKE A, B i C VRIJEDI $AC = AB + BC$

Standardna mjera za pravu tipa II u takoj ravni je

$$f: {}_cL_r \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to \ln \frac{x-c+r}{y}$$

U našem slučaju $f(x,y) = \frac{x+1}{y}$

$$|\ln 1 - \ln 3|$$

$$AC = |f(A) - f(C)| = \left|\ln \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \ln \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = \left|\ln \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{\sqrt{3}}}\right| = \left|\ln \frac{1}{3}\right| = \ln 3$$

$$AB = |f(A) - f(B)| = \left|\ln \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \ln \frac{1}{1}\right| = \left|\ln \frac{\sqrt{3}}{3} - 0\right| = \Big|\ln \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}}_{<1}\Big| = -\ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \ln \sqrt{3}$$

$$BC = |f(B) - f(A)| = \left|\ln \frac{1}{1} - \ln \frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \ln \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB + BC = AC \Rightarrow A-B-C$$

(#) Pokazati da ako je $A-B-C$ tada je $C-B-A$.

Rj.:

Ako su A, B i C tri različite i kolinearne tačke tada su i C, B i A različite i kolinearne

Kako je $A-B-C$ to je $AB+BC=AC$.

S obzirom da je $PQ=QP$ za sve P i Q imamo da

$$BA+CB=CA$$

ili drugačije napisano

$$CB+BA=CA$$

što smo i trebali pokazati.

(#) Neka je p prava, f koordinatni sistem za pravu p i neka su A, B i C tri različite tačke prave p, redom sa koordinatama x, y i z. Pokazati da ako je $A-B-C$ tada nije moguć ni jedan od sljedeća tri slučaja

1° $z < x < y$

2° $x < z < y$

3° $y < z < x$

Rj.:

$$A-B-C \Rightarrow AC = AB + BC \qquad \ldots (1)$$

f koordinatni sistem za pravu $p \Rightarrow f(A) = x,\ f(B) = y,\ f(C) = z$
Kako vrijedi jednačina mjere imamo da

(kako su A, B i C različite tačke to su x, y i z različite realne vrijednosti)

$$\left.\begin{aligned} AB &= |f(A) - f(B)| = |x-y| \\ BC &= |f(B) - f(C)| = |y-z| \\ AC &= |x-z| \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

Na osnovu (1) i (2) imamo $\quad |x-z| = |x-y| + |y-z| \quad \ldots (3)$

Pretpostavimo da je $z < x < y$. Tada $|x-y| = y-x$, $|y-z| = y-z$ i $|x-z| = x-z \overset{(3)}{\Rightarrow} x - z = y - x + y - z \Rightarrow x = y$ #kontradikcija ($x \neq y$)

Ako je $x < z < y$ tada $|x-y| = y-x$, $|y-z| = y-z$, $|x-z| = z-x$
$\overset{(3)}{\Rightarrow} z - x = y - x + y - z \Rightarrow z = y$ #kontradikcija ($z \neq y$)

Ako je $y < z < x$ tada $|x-y| = x-y$, $|y-z| = z-y$, $|x-z| = x-z \overset{(3)}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow x - z = x - y + z - y \Rightarrow y = z$ #kontradikcija ($y \neq z$)

Pretpostavka da vrijedi bilo koji od tri data slučaja nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Time ni jedan od tri data slučaja nije moguć.

Neka su $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ i $C(x,y)$ tri kolinearne tačke u Euklidovoj ravni sa osobinom da $x_1 < x_2$. Pokazati da je $A-C-B$ ako i samo ako $x_1 < x < x_2$.

Rj.

„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da je $x_1 < x < x_2$ i pokažimo da tada mora biti $A-C-B$.

Označimo sa p pravu koja prolazi kroz tačke A, B i C, i neka je f koordinatni sistem za p (standardni koordinatni sistem za pravu $L_{m,b}$ je $f(x,y) = x\sqrt{1+m^2}$). Tada

$$f(A) = x_1\sqrt{1+m^2}, \quad f(B) = x_2\sqrt{1+m^2}, \quad f(C) = x\sqrt{1+m^2}.$$

$$\left.\begin{aligned}
AB &= d_E(A,B) = |f(A)-f(B)| = |x_1-x_2|\sqrt{1+m^2} \overset{x_1<x_2}{=} (x_1-x_2)\sqrt{1+m^2} \\
AC &= d_E(A,C) = |f(A)-f(C)| = |x_1-x|\sqrt{1+m^2} \overset{x_1<x}{=} (x-x_1)\sqrt{1+m^2} \\
CB &= d_E(C,B) = |f(C)-f(B)| = |x-x_2|\sqrt{1+m^2} \overset{x<x_2}{=} (x_2-x)\sqrt{1+m^2}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = AC + CB \overset{A,B,C \text{ kolin.}}{\Rightarrow} A-C-B$$

„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da je $A-C-B$ i pokažimo da tada mora biti $x_1 < x < x_2$.

Neka je $L_{m,b}$ prava koja sadrži tačke A, B i C. [$x_1<x_2$ to ne postoji a t.d. $A,B \in L_a$.]

Standardni koordinatni sistem za $L_{m,b}$ je $f: L_{m,b} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to x\sqrt{1+m^2}$$

$$f(A) = x_1\sqrt{1+m^2}, \quad f(B) = x_2\sqrt{1+m^2}, \quad f(C) = x\sqrt{1+m^2}$$

$$A-C-B \Rightarrow AB = AC + CB \Rightarrow |f(A)-f(B)| = |f(A)-f(C)| + |f(C)-f(B)|$$

$$\Rightarrow |x_1-x_2|\sqrt{1+m^2} = |x_1-x|\sqrt{1+m^2} + |x-x_2|\sqrt{1+m^2} \quad /:\sqrt{1+m^2}$$

$$|x_1-x_2| = |x_1-x| + |x-x_2| \overset{x_1<x_2}{\Rightarrow} x_2-x_1 = |x_1-x| + |x-x_2| \quad \ldots(1)$$

Kako je $x_1 < x_2$ i A, B i C su različite točke prave $L_{u,S}$ moguć je samo jedan od sljedeća tri slučaja

$1^\circ \quad x < x_1 < x_2$

$2^\circ \quad x_1 < x < x_2$

$3^\circ \quad x_1 < x_2 < x$

Pokažimo da slučajevi 1° i 3° vode u kontradikciju

$$x < x_1 < x_2 \implies \left.\begin{array}{l} |x_1 - x| = x_1 - x \\ |x - x_2| = x_2 - x \end{array}\right\} \overset{(1)}{\implies} x_2 - x_1 = x_1 + x_2 - 2x$$

$$x = x_1$$

$\#$kontradikcija ($x \neq x_1$)

$$x_1 < x_2 < x \implies \left.\begin{array}{l} |x_1 - x| = x - x_1 \\ |x - x_2| = x - x_2 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\implies} x_2 - x_1 = 2x - x_1 - x_2$$

$$2x_2 = 2x$$

$$x_2 = x$$

$\#$kontradikcija ($x_2 \neq x$)

Pretpostavka da vrijede slučajevi 1° i 3° nas vodi u kontradikciju, pa nisu točna. Možemo zaključiti da $x_1 < x < x_2$.

Definicija

Ako su x, y i z realni brojevi, tada je y između x i z (što označavamo sa $x*y*z$) ako je

$$\text{ili} \quad x<y<z \quad \text{ili} \quad z<y<x$$

Teorem

Neka je p prava i neka je f koordinatni sistem za p. Ako su A, B i C tri tačke prave p, redom sa koordinatama x, y i z tada je $A-B-C$ ako i samo ako je $x*y*z$.

#

Dokazati teoremu iznad.

Rj. Primjetimo da ako tačke A, B i C nisu različite, tada obe tvrdnje $A-B-C$ i $x*y*c$ su netačne. Pa pretpostavimo da su A, B i C različite. Prvo ćemo pokazati da je $x*y*z$ ako je $A-B-C$.

Dato nam je da $x=f(A)$, $y=f(B)$ i $z=f(C)$ i da je $AB+BC=AC$. Iz jednačine mjere imamo da

$$AB=|f(A)-f(B)|=|x-y|, \quad BC=|y-z|, \quad i \quad AC=|x-z|$$

pa je

$$|x-y|+|y-z|=|x-z|. \quad \ldots(1)$$

Želimo pokazati da jednačina (1) povlači da $x<y<z$ ili $z<y<x$. Kako su A, B i C različite tačke tada su i realni brojevi x, y i z različiti, i vrijedi tačno jedan od sljedećih slučajeva

$1°$ $x<y<z$ $\quad$ $2°$ $z<y<x$ $\quad$ $3°$ $y<x<z$ $\quad$ $4°$ $z<x<y$

$5°$ $x<z<y$ $\quad$ $6°$ $y<z<x$.

Pokazaćemo da slučaj 3° vodi u kontradikciju. Slični argumenti odbacuju i slučajeve 4°, 5° i 6°.

$$Y < X < Z \Rightarrow |X-Y| = X-Y, \quad |Y-Z| = Z-Y \quad i \quad |X-Z| = Z-X$$

Ako stavimo ove jednakosti u jednakost (1) dobićemo

$$X-Y+Z-Y = Z-X \quad \Rightarrow \quad X = Y$$

#kontradikcija
(X, Y i Z su različiti)

Prema tome slučaj 3° ne vrijedi. U prethodnom zadatku smo pokazali da slučajevi 4°, 5° i 6° nisu mogući. Prema tome vrijedi jedan od slučajeva 1° ili 2° $\Rightarrow X * Y * Z$.

Pokažimo još da $X * Y * Z$ povlači $A-B-C$. Pretpostavimo da je $X<Y<Z$ (slučaj $Z<Y<X$ bi riješili na sličan način).

$$X<Y<Z \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |X-Y| = Y-X \\ |X-Z| = Z-X \\ |Y-Z| = Z-Y \end{array}\right\} \Rightarrow |X-Y| + |Y-Z| = |X-Z|$$

$$\Rightarrow \quad |f(A)-f(B)| + |f(B)-f(C)| = |f(A)-f(C)|$$

$$\Rightarrow \quad AB + BC = AC$$

Kako su A, B, C kolinearne i različite to je $A-B-C$.

(#) Date su tri različite tačke na pravoj. Pokazati da je jedna i samo jedna od ovih tački između druge dvije.

Rj.:

U rješenju zadatka ćemo iskoristiti teorem:

Ako su A, B i C tri tačke prave p čije su koordinate x, y i z redom tada A-B-C ako i samo ako $x * y * z$.

· Neka su M, N i P tri različite tačke. Redom ako označimo koordinate ovih tački sa x, y i z tada s obzirom da je jedan od ovih brojeva između druga dva na osnovu prethodne teoreme možemo zaključiti da je jedna od ovih tački između druge dvije.

(#) Pokazati da u Euklidskoj ravni $A-B-C$ ako i samo ako postoji realan broj t takav da je $0<t<1$ i $B=A+t(C-A)$.

Rj:

„$\Leftarrow$" Pretpostavimo da postoji realan broj t takav da je $0<t<1$ i $B=A+t(C-A)$, i pokažimo da je tada $A-B-C$.

Primijetimo da tačke A, B i C pripadaju pravoj L_{AB}
U jednom od prethodnih zadataka smo pokazali da je $f: L_{AC} \to \mathbb{R}$ definisano sa $f(A+t(C-A)) = t\|C-A\|$ mjera za $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$. Sad imamo

$$f(A) = f(A+0\cdot(C-A)) = 0\,\|C-A\| = 0$$
$$f(B) = f(A+t(C-A)) = t\,\|C-A\|$$
$$f(C) = f(A+1\cdot(C-A)) = \|C-A\|$$

$$\left.\begin{aligned} AB &= d_E(A,B) = |f(A)-f(B)| = t\,\|C-A\| \\ BC &= d_E(B,C) = |f(B)-f(C)| = (1-t)\,\|C-A\| \\ AC &= d_E(A,C) = |f(A)-f(C)| = \|C-A\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow AC = AB+BC \overset{A,B,C\in L_{AB}}{\Updownarrow} A-B-C$$

q.e.d.

„$\Rightarrow$" Pretpostavimo da je $A-B-C$ i pokažimo da tada postoji realan broj t takav da je $0<t<1$ i $B=A+t(C-A)$.

Posmatrajmo pravu $L_{AC} = \{\bar{X}\in\mathbb{R}^2 \mid \bar{X} = A+t(C-A),\ t\in\mathbb{R}\}$

Kako je $A-B-C$ to su A, B i C kolinearne i $AB+BC=AC$.
Ovo znači da postoji neki realan t t.d. $B=A+t(C-A)$
(postoji tačno jedna prava L_{AC} koja prolazi kroz tačke A i C.
Pokažimo da je $0<t<1$.

$f(A)=0,\ f(C)>0 \overset{A-B-C}{\Rightarrow} f(A)<f(B)<f(C),\ f(B) = t\|C-A\| = t f(C) \Rightarrow 0<t<1$

q.e.d.

Ako su A i B različite tačke metričke geometrije tada

(i) postoji tačka C sa osobinom da $A-B-C$; i

(ii) postoji tačka D sa osobinom $A-D-B$.

Rj.

Neka je f koordinatni sistem za pravu $p(A,B) = \overleftrightarrow{AB}$ takav da je $f(A) < f(B)$ i neka su $x = f(A)$ i $y = f(B)$. Da bi pokazali (i) stavimo da je z npr. $z = y+1$ i označimo sa C tačku $f^{-1}(z)$ ($C = f^{-1}(z)$). Tada je $A-B-C$ s obzirom da je $x < y < z$.

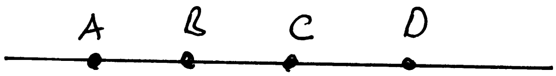
Dokažimo (ii). Definišimo $w \in \mathbb{R}$ i $D \in p(A,B) = \overleftrightarrow{AB}$ sa

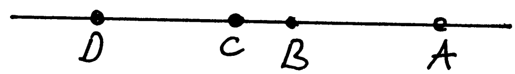
$w = \frac{x+y}{2}$ i neka je $D = f^{-1}(w)$ (tj. $f(D) = w$).

Kako je $x < w < y$ to je $A-D-B$.

Definicija

$A-B-C-D$ znači da $A-B-C$, $A-B-D$, $A-C-D$ i $B-C-D$





(#) Pokazati da $A-B-C-D$ u metričkoj geometriji povlači da je $\{A, B, C, D\}$ kolinearan skup.

Rj.

$A-B-C-D \Rightarrow A-B-C$ pa su A, B i C kolinearne ...(1)

$A-B-C-D \Rightarrow B-C-D$ pa su B, C i D kolinearne ...(2)

Kako par tački B i C određuju jedinstvenu pravu $\ell(B,C) = \overleftrightarrow{BC}$ i kako $A \in \ell(B,C)$ (na osnovu (1)) i $D \in \ell(B,C)$ (na osnovu (2)) to je $\{A, B, C, D\}$ kolinearan skup.

(#) Pretpostavimo da je u metričkoj geometriji $A-B-C$ i $B-C-D$. Pokazati da je tada $A-B-D$ i $A-C-D$ a time i $A-B-C-D$.

Rj.

$A-B-C \Rightarrow$ tačke A, B i C su kolinearne
$B-C-D \Rightarrow$ tačke B, C i D su kolinearne

$\xRightarrow{\text{kako postoji jedinst. prava } p(B,C)=\overleftrightarrow{BC}}$

$\Rightarrow$ tačke A, B, C i D su kolinearne.

Označimo redom sa a, b, c i d koordinate ovih tački (koordinate su vrijednosti $f(A), \ldots$ gdje je f koordinatni sistem) i neka je p prava koja sadrži ove četri tačke.

$A-B-C \Leftrightarrow a * b * c$

$B-C-D \Leftrightarrow b * c * d$

Time je ili $a < b < c < d$ ili $d < c < b < a$;

u bilo kojem slučaju $a * c * d$ i $a * b * d$

$\Rightarrow A-C-D$ i $A-B-D$

Sad $A-B-C-D$ slijedi iz definicije.

Primjetimo da smo u zadatku koristili sljedeću Teoremu:
Ako su A, B, C kolinearne tačke prave p sa koordinatnim sistemom f za pravu p tada $A-B-C$ akko $f(A) * f(B) * f(C)$

Neka su A, B, C, D različite kolinearne tačke u metričkoj geometriji. Pokazati da se tačke uvijek mogu imenovati po poretku tako da $A-B-C-D$.

Rj. Neka su date četri tačke prave p, i neka je f koordinatni sistem za pravu p. Sad četri date tačke redom možemo označiti sa A, B, C, D akko imamo da je $a*b*c*d$ gdje su $a=f(A)$, $b=f(B)$, $c=f(C)$ i $d=f(D)$.

Ovo je uvijek moguće uraditi s obzirom da su realni brojevi linearno uređeni; tj. četri različita realna broja imaju linearan poredak.